ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ РАНГА $n-1$

М.А.Чешкова

В настоящей работе рассматривается отображение $f: A_n \to A_n$. Предполагается $\operatorname{rang} f = n-1$ в каждой точке области определения. Исследуются свойства инвариантных подпространств $L_1 = \operatorname{Ker} f'$, $L_{n-1} = f'(A_n)$.

1. Рассмотрим в аффинном пространстве A_n отображение $f(M) = M^*$ ранга $n-1$. Присоединим аффинный репер $R = \{M, \bar{e}_I\}$ $(I, \ldots = 1, \ldots, n)$ с деривационными формулами $d\bar{M} = \omega^I \bar{e}_I$, $d\bar{e}_I = \omega_I^J \bar{e}_J$ и уравнениями структуры $D\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I$, $D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J$. Имеем

$$\bar{M}^* = \bar{M} + b^I \bar{e}_I, \quad d\bar{M}^* = \theta^I \bar{e}_I, \tag{1}$$

$$\theta^I = \omega^I + db^I + b^K \omega_K^I, \quad \theta^I = \Lambda^I_J \omega^J. \tag{2}$$

Продолжая (2), получим

$$db^I + b^K \omega_K^I = b^I_K \omega^K, \quad b^I_K = \Lambda^I_K - \delta^I_K, \tag{3}$$

$$d\Lambda^J_I - \Lambda^J_K \omega^K_I + \Lambda^K_I \omega^J_K = \Lambda^J_{IK} \omega^K, \quad \Lambda^J_{IK} = \Lambda^J_{KI}, \tag{4}$$

$$d\Lambda^I_{JK} - \Lambda^I_{MK} \omega^M_J - \Lambda^I_{JM} \omega^M_K + \Lambda^M_{JK} \omega^I_M = \Lambda^I_{JKM} \omega^M, \quad \Lambda^I_{JKM} = \Lambda^I_{JMK}. \tag{5}$$

Поместим векторы $\bar{e}_n$ на L_1, $\bar{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ на L_{n-1}. Тогда имеем $\Lambda^i_n = \Lambda^n_i = \Lambda^n_n = 0$, $\Lambda^n_{ni} = \Lambda^n_{nn} = \Lambda^n_{in} = 0$, $f'(\bar{e}_i) = \Lambda^j_i \bar{e}_j$,

$$f'(\bar{e}_n) = \bar{0}, \ -\Lambda^i_j \omega^j_n = \Lambda^i_{nK} \omega^K, \ \Lambda^j_i \omega^n_j = \Lambda^n_{ij} \omega^j, \ \omega^i_n = a^i_{nK} \omega^K, \tag{6}$$
$$\omega^n_i = a^n_{ij} \omega^j, \ -\Lambda^i_j a^j_{nK} = \Lambda^i_{nK}, \ \Lambda^j_i a^n_{js} = \Lambda^n_{is} \ (i, j, s = 1, \ldots, n-1)$$

Оператор f' индуцирует в L_{n-1} оператор $\Lambda(\Lambda^j_i)$, где

$$\Lambda \bar{e}_i = \bar{f}_i = \Lambda^j_i \bar{e}_j, \quad \det \|\Lambda^j_i\| \neq 0.$$

2. Определим в A_n гиперраспределение $\Delta_{n-1} = (M, L_{n-1})$ и 1-распределения $\Delta_1 = (M, L_1)$, $\tilde{\Delta}_1 = (M, \bar{b})$. Кривые гиперраспределения Δ_{n-1} удовлетворяют уравнению $\omega^n = 0$.

Определение 1. Направления, определяемые собственными векторами оператора Λ, называются фундаментальными направлениями гиперраспределения Δ_{n-1}.

Фундаментальные направления Δ_{n-1} определяются системой $(\Lambda^i_j - \lambda \delta^i_j)\omega^j = 0$, $\omega^n = 0$.

Определение 2. Точки прямой распределения $\tilde{\Delta}_1$, для которых фокальное направление является фундаментальным, называются фундаментальными точками.

Теорема 1. Точка $M^* = f(M)$ является фокальной точкой распределения Δ_{n-1} вдоль L_1, соответствующая линейчатая поверхность - конус.

Доказательство теоремы следует из того, что

$$d\bar{F} = (\delta^i_j + t b^i_j)\omega^j \bar{e}_i + (1-t)\omega^n \bar{e}_n + dt\,\bar{b}, \quad \bar{F} = \bar{M} + t\bar{b}.$$

Аффинная нормаль [1] распределения Δ_{n-1} определится из системы $\omega^n_i = a^n_{ij}\omega^j = 0$. При $\det \|a^n_{ij}\| \neq 0$, т.е. когда Δ_{n-1} невырождено, следует

Теорема 2. Аффинная нормаль Δ_{n-1} совпадает с L_1.

3. Характеристические направления [3] отображения f определяются из условия $\Lambda^I_{JK}\omega^J\omega^K = \lambda\omega^I$. Характеристические направления, соответствующие принадлежат конусу $\Lambda^n_{ij}\omega^i\omega^j = 0$, $\omega^n = 0$, т.е. характеристическому конусу Δ_{n-1}.

Теорема 3. Если фундаментальные точки Δ_{n-1} различны и Δ_{n-1} голономно, то фундаментальные направления Δ_{n-1} сопряжены как относительно асимптотического, так и характеристического конусов Δ_{n-1}.

Доказательство. Направим $\bar{e}_i$ вдоль фундаментальных направлений Δ_{n-1}. Тогда

$$\Lambda^j_i = 0 \ (i \neq j), \quad \Lambda^i_i a^n_{ij} = \Lambda^n_{ij} = \Lambda^j_j a^n_{ji} = \Lambda^n_{ji}. \tag{7}$$

Утверждение теоремы следует из условия голономности Δ_{n-1} $(a^n_{ij} = a^n_{ji})$ и формул (7).

Поле тензора $\Lambda^J_{\mathcal{J}K}$ определяет операцию λ -свертки [2] с векторными полями $x(x^i)$, $y(y^i)$:

$$\lambda_x y = \lambda_y x = \Lambda^J_{\mathcal{J}K} x^{\mathcal{J}} y^K \bar{e}_J = \Lambda^i_{\mathcal{J}K} x^{\mathcal{J}} y^K \bar{e}_i + \Lambda^n_{ij} x^i y^j \bar{e}_n .$$

λ -свертка удовлетворяет свойствам:

1. $\lambda_x y = \lambda_y x = d_y\left(f'(x)\right) - f'\left(d_y(x)\right)$,

где $d_y x = (dx^J + x^K \omega^J_K)\bar{e}_J$, $\omega^J = y^J \theta$.

2.Для направлений x ,принадлежащих характеристическому конусу, $\lambda_x x \in \Delta_{n-1}$.

3.Для любого $x \in A_n$, $y \in L_1$, $\lambda_x y \in \Delta_{n-1}$.

Библиографический список

1.А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве:Тр. Геометр.семинара | ВИНИТИ АН СССР.- М.,1974.Т.5.С.169-193.

2.Б а з ы л е в В.Т.,Кузьмин М.К.,Столяров А.В. Сети на многообразиях: Проблемы геометрии | ВИНИТИ АН СССР.- М.,1980.Т.12.С.97-125.

3.Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n : Тр.Геометр. семинара| ВИНИТИ АН СССР.-М.,1971.Т.3.С.235-242.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17. 1986

УДК 514.75

СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПРОСТРАНСТВОМ КВАДРИК

Ю.И.Ш е в ч е н к о

Пространство квадрик в проективном пространстве является тензорным расслоением с базой - многообразием Грассмана.Рассматривается расслоение линейных реперов, принадлежащих плоскостям базы,и его объединение с тензорным расслоением над общей базой.Это объединение оказывается главным расслоением.В указанных расслоениях заданы соответствующие связности с помощью оснащения Бортолотти и его обобщения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_J\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega^{\mathcal{J}}_J A_{\mathcal{J}} \qquad (J,\mathcal{J},K = \overline{0,n}) , \qquad (1)$$

где $\omega^{\mathcal{J}}_J$ -инвариантные формы линейной группы $GL(n+1)$, действующей в пространстве P_n неэффективно.Эти формы удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\omega^{\mathcal{J}}_J = \omega^K_J \wedge \omega^{\mathcal{J}}_K . \qquad (2)$$

Проективная группа $GP(n) \subset GL(n+1)$ выделяется условием проективности $\omega^J_J = 0$.

В пространстве P_n рассмотрим предварительно многообразие Грассмана $G_r(m,n)$. Поместим вершины A_α репера $\{A_J\}$ в образующую m-плоскость L_m и запишем для них формулы (1):

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta + \omega^i_\alpha A_i \quad (\alpha,\beta,\ldots = \overline{0,m}\ ;\ i,j = \overline{m+1,n}).$$